Wichtige Anmerkungen

Dieses kleine Zusammenstellung beinhaltet den auf Übungsblatt 5 geforderten Stoff für die Klausur in *Mathematik für Chemiker 2* im Sommersemester 2005. Die vorgestellten Verfahren mögen mathematisch nicht ganz korrekt sein, sollten aber zum Lösen von Aufgaben ausreichen. Leider kann nicht für die Fehlerfreiheit dieses Scripts garantiert werden. Sollte das Script dem Inhalt der Übungen widersprechen, so liegt im Zweifelsfall ein Fehler in diesem Script vor.

Achtung: In der Veröffentlichung vom 6. Juni 2005 befanden sich in der unteren Tabelle auf Seite 8 einige Fehler. Diese sind nun korrigiert. Auch der Inhalt von Übungsblatt 5 bzw. die zugehörige Theorie sind nun im Script enthalten.

Vielen Dank an dieser Stelle noch an Dr. Daniel Matthes, für die Hilfe bei der Beseitigung von Fehlern.

In dieser Veröffentlichung wurden folgende Fehler korrigiert

S. 9 Die allgemeine homogene Lösung ist somit $y_{\mathrm{h}}(x) = ce^{3x}$.

S. 9 $\Leftrightarrow \quad a_1 - 3(a_1 x + a_0) \quad = \quad x$

S. 10 Bestimme $A - \lambda E$. Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 6 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

S. 10 Löse hierzu $(A - \lambda_j E)v_j = 0$ in Matrixform.

S. 10 Erhalte als Lösung für den Eigenwert $\lambda_3 = 4$ den Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zudem wurden an einigen Stellen noch kleinere Erklärungen und Hilfestellungen eingefügt.

Mathematik für Chemiker II

Sommersemester 2005 **10. Juni 2005**

Inhaltsverzeichnis

Autor: Werner Schwalbach
`http://BiomedizinischeChemie.de`

Vielen Dank an **Dr. Daniel Matthes** für die Hilfe bei der Beseitigung von Fehlern.
Diese Zusammenstellung beinhaltet eine Übersicht über die mathematische Verfahren auf Basis der von Dr. Daniel Matthes gehaltenen Übungen. Neben diesen finden sich auch Grundlagen zu den behandelten Themen. Die verschiedenen Abschnitte entsprechen den auf Übungsblatt 5: 3.6.2005 aufgelisteten klausurrelevanten Themen. Neben den Übungen wurde noch „Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler“ von Lothar Papula zu Rate gezogen. Alle Beispiel stammen von den Übungsblättern von Dr. Daniel Matthes.

1 Integralrechnung

1.1 Grundlegende Regeln der Integralrechnung

1.1.1 Fundamentalsatz

Jedes unbestimmte Integral $I(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ von $f(x)$ ist eine Stammfunktion zu $f(x)$:

$$I(x) = \int_a^x f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad I'(x) = f(x)$$

Es sei die Funktion $f(x) = bx^a$. Ihre Stammfunktion $F(x)$ ist demnach:

$$F(x) = \frac{b}{a+1} \cdot x^{a+1}$$

Die Integration ist, wie aus diesem Zusammenhang ersichtlich, die Umkehr der Differentation.

1.1.2 Regeln zur Integration

Faktorregel

Ein konstanter Faktor C darf vor das Integral gezogen werden.

$$\int_a^b C \cdot\ f(x)\,dx \quad = \quad C \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Summenregel

Eine endliche Summe von Funktionen darf gliedweise integriert werden:

$$\int_a^b \left(f_1(x) + \ldots + f_n(x)\right)\ dx \quad = \quad \int_a^b f_1(x)\,dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Vertauschungsregel

Das Vertauschen der beiden Integrationsgrenzen bewirkt einen Vorzeichenwechsel des Integrals.

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad -\int_b^a f(x)\,dx$$

Nullintegral

Fallen die beiden Integralgrenzen zusammen ($a = b$), so ist der Integralwert gleich Null

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \int_a^a f(x)\,dx \quad = \quad 0$$

Zerlegung des Integrationsintervalls in zwei Teilintervalle

Für jede Stelle c aus dem Integrationsintervall $a \leq c \leq b$ gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \int_a^c f(x)\,dx\ + \int_c^b f(x)\,dx$$

1.2 Techniken

1.2.1 Integration durch Subsitution

1. Gegen sei das Integral $\int f(x)\ dx$
2. Bilde $g(x) = z$. Das bedeutet, dass x in Abhängigkeit der Funktion (z.B. $f(x) = x^2 \Rightarrow g(x) = z$) ersetzt wird.
$$\frac{dz}{dx} = g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{dz}{g'(x)}$$
3. Es werden $g(x) = z$ und $dx = \frac{dz}{g'(x)}$ in das Integral $\int f(x)\ dx$ eingesetzt. Das neue Integral wird berechnet.
4. Abschließend die Rücksubstitution durchgeführt, d.h. z wieder durch $g(x)$ ersetzt.

Anmerkung: Dieses Verfahren weicht von dem in der Übung dargestellten ab.
Quelle: „Mathematische Formelsammlung“ von Lothar Papula S.149

1.2.2 Partielle Integration

1. Gegeben sei das Integral $\int_a^b f(x)\ dx$
2. Das gegebene Integral wird in ein Produkt umgeformt:
$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b u(x) \cdot v'(x)$$
Hierbei ist $v'(x)$ so zu wählen, dass sich $v(x)$ leicht bilden lässt.
3. Die vollständige Lösungsformel lautet:
$$\int_a^b f(x)\ dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\ dx$$

1.2.3 Partialbruchzerlegung

Bei der Partialbruchzerlegung wird eine *echt* gebrochenrationale Funktion vom Typ $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$, mit dem Zählerpolynom $Z(x)$ und dem Nennerpolynom $N(x)$, in eine *endliche* Summe aus Teilbrüchen umgeschrieben. Diese Teilbrüche werden *Partialbrüche* genannt. Ziel dieser Zerlegung ist es über die Brüche problemlos integrieren zu können.

1. Bestimmen der Nullstellen x_n ($n \in \mathbb{R}$) des Nennerpolynoms $N(x)$.
2. Es werden Brüche so viele Brüche gebildet, wie Nullstellen vorhanden sind. Als Zähler werden die Variablen $A, B, C, \ldots$ verwendet. Im Nenner finden sich die Nullstellen in der Form $x - x_n$. Dies sieht wie folgt aus:
$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \ldots + \frac{\textit{Variable}}{x - x_n}$$

3. Zur Bestimmung der Variablen werden alle Brüche auf einen gemeinsamen Nenner gebracht und die Variablen anschließend ausgeklammert. Es wird daraufhin mit den ausgeklammerten Variablen ein Gleichungssystem aufgestellt und gelöst. Ein Beispiel ausgehend vom Term $\frac{x+5}{x^2-1}$ (siehe Übungsblatt 1, Aufgabe 2(i)):

$$\begin{aligned} \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} &= \frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1} \\ &= \frac{(A+B)x+(B-A)}{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad A+B=1 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad B-A=5 \end{aligned}$$

   Daraus folgt: A = -2, B = 7
   Anmerkung: Zur Aufstellung des Linearen Gleichungssystems werden die ausgeklammerten Variablen mit dem Zähler des ursprünglichen Terms verglichen. In diesem Beispiel wäre dieser Zähler $x + 5$. Nunmehr wurden ausgeklammert (A + B)x. Damit dieser Ausdruck gleich dem Zähler des ursprünglichen Terms ist, muss gelten $A + B = 1$. Ebenso muss für $B - A$ gelten $B - A = 5$ damit der ursprüngliche Term erfüllt ist.

4. Es werden die Variablen eingesetzt und die Partialbruchzerlegung ist vollständig. Nun kann über die Brüche gliedweise integriert werden.

1.3 Rotationskörper

Es rotiere eine Funktion $f(x)$ um die x-Achse und bilde einen Vollkörper. Es folgen die Regeln zur Besimmung des Volumens und der Mantelfläche dieses Körpers.

Volumen eines Rotationskörpers

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Mantelfläche eines Rotationskörpers

$$M = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

2 Differentialgleichungen / Anfangswertprobleme

2.1 Trennung der Variablen

1. Sei eine Funktion $f(x)$ gegeben, die $\dot{x}$ enthalte. $\dot{x}$ ist die Ableitung der Funktion x nach der Zeit t

   $$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

   In der gegebenen Funktion $f(x)$ wird $\dot{x}$ durch den oben genannten Term ersetzt.

2. Bringe alle Terme mit x auf die eine, alle Terme mit t auf die andere Seite und integiere unbestimmt auf beiden Seiten.

3. Löse abschließend nach x auf.

2.1.1 Beispiel

Die Lösung einer gewöhlichen Differentialgleichung wird am Beispiel der Funktion $\dot{x} = tx^2$ demonstriert.

1. $\dfrac{dx}{dt} = tx^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \dfrac{dx}{x^2} = t\ dt$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = \int t\ dt + C \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{1}{x} = \frac{t^2}{2} + C$

3. $x = -\dfrac{1}{\frac{t^2}{2} + C}$

2.2 Variation der Konstanten (am Beispiel)

Es wird das Beispiel (siehe Übungsblatt 2, Aufgabe 3) $m \cdot \dot{v} + kv = mg$. Die einzelnen Elemente dieser Gleichung sind:

- $\dot{v}$ ist eine Ableitung 1. Ordnung vorhanden, daher spricht man von einer Differentialgleichung *1. Ordnung*.
- v tritt nur in 1. Potenz auf. Es handelt sich daher um eine *lineare* Differentialgleichung.
- Es ist ein von v unabhängiger Term mg vorhanden. Daher ist die vorliegende Differentialgleichung *inhomogen*.

Die Lösung einer solchen Gleichung erfolgt in drei Schritten.

1. Bestimme die *allgemeine* Lösung der zugehörigen *homogenen* Differentialgleichung. Setze hierzu den inhomogenen Term gleich Null.
2. Bestimme eine *spezielle* Lösung der *in*homogenen Differentialgleichung. Prinzip der Varitation der Konstanten.
3. Kombiniere die spezielle Lösung mit einer geeigeneten homogenen Lösung, so dass die Anfangsbedingung erfüllt ist.

Schritt 1: Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

Löse $m\dot{v} + kv = mg$ nach $\dot{v}$ auf und bestimme die homogene Lösung, wie in 2.1 beschrieben. Setze hierzu den inhomogenen Term $mg = 0$.

$$m\dot{v} + kv = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad v(t) = e^c \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$$

Wähle $e^c = C$ und erhalte die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

Schritt 2: Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

Ausgehen von der allgemeinen Lösung der *homogenen* Gleichung $v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t}$ sei nach dem *Prinzip der Variation der Konstanten* die Konstante C eine abhängige Funktion: $C \Rightarrow C(t)$. Erhalte:

$$v(t) = C(t)e^{-\frac{k}{m}t}$$

Setze nunmehr die neu erhaltene Gleichung $v(t) = C(t)e^{-\frac{k}{m}t}$ in die Ausgangsgleichung $m \cdot \dot{x} + kv = mg$ ein. Im folgenden sei zur Vereinfachung $C = C(t)$. Erhalte:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{m \cdot \frac{d}{dt}\left(Ce^{-\frac{k}{m}t}\right)}_{\text{Produktregel}} + k \cdot (Ce^{-\frac{k}{m}t}) = mg \\
\Leftrightarrow \quad & m \cdot (\underbrace{\dot{C} \cdot e^{-\frac{k}{m}t}}_{u'v} - \underbrace{C \cdot \tfrac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t}}_{uv'}) \quad + \quad k \cdot Ce^{-\frac{k}{m}t} = mg \\
\Leftrightarrow \quad & m\dot{C}e^{-\frac{k}{m}t} = mg \\
\Leftrightarrow \quad & \dot{C} = g \cdot e^{\frac{k}{m}t} \\
\Leftrightarrow \quad & C = \frac{mg}{k}(e^{\frac{k}{m}t} + K).
\end{aligned}$$

Die Integrationskonstante K kann beliebig gewählt werden. Es sei im Folgenden $K = 0$. Daraus folgt:

$$C(t) = \frac{mg}{k}\,(e^{\frac{k}{m}t})$$

Eine spezielle Lösung wird durch Einsetzen von $C(t)$ in $v(t) = C(t)e^{-\frac{k}{m}t}$ erhalten. Sie lautet in diesem Fall:

$$v(t) = \frac{mg}{k}\,e^{\frac{k}{m}t} \cdot e^{-\frac{k}{m}t} \qquad = \qquad \frac{gm}{k}$$

Schritt 3: Kombinination der Lösungen

Kombiniere die spezielle Lösung mit einer geeigeneten homogenen Lösung, so dass die Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ erfüllt ist. Addiere hierzu zur Lösung der *inhomogenen* Gleichung die Lösung der *homogenen* Gleichung aus Schritt 1 und wähle in dieser $C = \lambda$.

$$v(t) = \frac{mg}{k} + \lambda e^{-\frac{k}{m}t}$$

Sei $v(t) = v(0) = v_0$. Damit ist $t = 0$. Eingesetzt in die Gleichung folgt:

$$v_0 = \frac{mg}{k} + \lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = v_0 - \frac{mg}{k}$$

Lösung

Erhalte als Lösung des Anfangswertproblems durch Einsetzen von λ in $v(t)$:

$$v(t) = \frac{mg}{k} + (v_0 - \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t}$$

2.3 Lösen durch geeignete Ansatzfunktionen

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung höherer Ordnung besteht aus

Allgemeine Lösung der zugehörigen *homogenen* Differentialgleichung
$+$ Partikularlösung der *inhomogenen* Differentialgleichung

2.3.1 Bestimmung der allgemeinen Lösung einer homogenen Differentialgleichung

1. Bestimme das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ $[y \rightarrow 1, y' \rightarrow \lambda, y'' \rightarrow \lambda^2, \ldots]$.

2. Ermittle die Nullstellen des Polynoms $P(\lambda)$ $[L = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$.
   Setze hierzu den inhomogenen Anteil gleich 0.

3. Ermittle mit Hilfe der λ ein Fundamentalsystem F.
   Gehe L Element für Element durch.

   Falls λ_j eine
   - einfache reelle Nullstelle von $P(\lambda)$ ist,
     dann füge $e^{\lambda_j x}$ dem Fundamentalsystem F hinzu.
   - doppelte reelle Nullstelle von $P(\lambda)$ ist,
     dann füge $e^{\lambda_j x}$ und $x \cdot e^{\lambda_j x}$ zum Fundamentalsystem hinzu.
   - einfache komplexe Nullstelle von $P(\lambda)$ ist,
     dann füge $e^{(\mathrm{Re}\cdot\lambda_j)x} \cdot \cos[(\mathrm{Im} \cdot \lambda_j)x]$ und $e^{(\mathrm{Re}\cdot\lambda_j)x} \cdot \sin[(\mathrm{Im} \cdot \lambda_j)x]$ zum Fundementalsystem hinzu.

4. Die Lösung ist gleich die Linerarkombination[1] der Funktionen im Fundamentalsystem.

2.3.2 Bestimmung der Partikularlösung der inhomogenen Differentialgleichung

Es wird das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ der inhomogenen Gleichung gebildet und mit Hilfe der folgenden Tabellen eine Ansatzfunktion $y_*(x)$ gewählt.

μ ist…	$g(x) = e^{\mu x}$	$g(x) = xe^{\mu x}$	$g(x) = x^2 e^{\mu x}$
keine Nullstelle von $P(\lambda)$	$a_0 e^{\mu x}$	$(a_0 + a_1 x)e^{\mu x}$	$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)e^{\mu x}$
eine einfache NS von $P(\lambda)$	$a_1 x e^{\mu x}$	$(a_1 x + a_2 x^2)e^{\mu x}$	$(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)e^{\mu x}$
eine doppelte NS von $P(\lambda)$	$a_2 x^2 e^{\mu x}$	$(a_2 x^2 + a_3 x^3)e^{\mu x}$	$(a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4)e^{\mu x}$

$i\omega$ ist…	$g(x) = \sin\omega x$ oder $\cos\omega x$	$g(x) = x\sin\omega x$ oder $x\cos\omega x$
keine Nullstelle von $P(\lambda)$	$b_0 \sin\omega x + c_0 \cos\omega x$	$(b_0 + b_1 x)\sin\omega x + (c_0 + c_1 x)\cos\omega x$
eine einfache NS von $P(\lambda)$	$b_1 x \sin\omega x + c_1 x \cos\omega x$	$(b_1 x + b_2 x^2)\sin\omega x + (c_1 x + c_2 x^2)\cos\omega x$

[1] Eine Linearkombination eines Fundamentalsystems $F = \{e^x, xe^{-3x}\}$ wäre $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$

2.3.3 Beispiel

Dieses Beispiel stammt vom 3. Übungsblatt: 13.05.2005, Aufgabe 2 (i)

Aufgabenstellung
Bestimme die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung: $y' - 3y = g(x)$ mit $g(x) = x$.

Bestimmung der allgemeinen Lösung (homogene Dgl)
Sei $y' - 3y = 0$, so ist das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda - 3$ und $L = \{\lambda_1 = 3\}$. Das Fundamentalsystem F ist somit, da alle Nullstellen reell und nicht doppelt sind, $F = \{e^{3x}\}$.
Die allgemeine homogene Lösung ist somit $y_{\mathrm{h}}(x) = ce^{3x}$.

Bestimmung der Partikularlösung
Es sei $y' - 3y = x$ oder umgeschrieben $y' - 3y = xe^{0x}$ mit $\mu = 0$. Das Polynom $P(\lambda) = \lambda - 3$ und durch einsetzen von $\mu = 0$ für λ ergibt sich, dass μ keine Nullstelle ist.
Es besteht der Fall „keine Nullstelle von $P(\lambda)$" und $g(x) = e^{\mu x}$.
Die Ansatzfunktion ist somit:

$$\begin{aligned} y_*(x) &= (a_1 x + a_0)\, e^{0x} \\ &= a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

Einsetzen von y_* in die Ausgangsleichung $y' - 3y = x$ führt zu

$$\begin{array}{rlcl} & y_*' - 3y_* & \overset{!}{=} & x \\ \Leftrightarrow & a_1 - 3(a_1 x + a_0) & = & x \\ \Leftrightarrow & -3a_1 x + a_1 - 3a & = & x \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -3a_1 & = \quad 1 \\ a_1 - 3a_0 & = \quad 0 \end{cases} & \Leftrightarrow & \begin{cases} a_1 & = \quad -\frac{1}{3} \\ a_0 & = \quad -\frac{1}{9} \end{cases} \end{array}$$

Allgemeine Lösung (gesamt)
Es wird zu der allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung die Partikularlösung der inhomogenen Differentialgleichung addiert und als allgemeine Lösung der Gleichung erhalten:

$$y(x) = ce^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$$

2.4 Eigenwerte und Eigenvektoren (2×2)

2.4.1 Lösen von Differentialgleichungssystemen

Es sei zu bestimmen die Lösung eines Differentialgleichungssystems $\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$ für einen Vektor $x(t) \in \mathbb{R}^2$. Hierbei gehe wie im Folgenden beschrieben vor:

1. Es sei die Matrix Ax gegeben. Sie wird mit dem gegebenen Vektor $x(t) \in \mathbb{R}^2$ multipliziert. Ausgehend von einer 2×2 Matrix ergibt sich:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x_1} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x_2} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}$$

2. Die erhaltenden Differentialgleichungen werden nach gängigen Verfahren gelöst.

3. Die erhaltenen Lösungen werden in Vektorform überführt. Dies wird an folgendem Beispiel demonstriert:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \alpha \\ x_2(t) &= \beta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.4.2 Beispiel

Dieses Beispiel stammt vom 4. Übungsblatt: 27.05.2005, Aufgabe 2 (i)

Löse das Differentialgleichungssystem $\dot{x} = A \cdot x(t)$ für den Vektor $x(t) \in \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$.

1. Es ist die Matrix Ax gegeben und ein Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ergibt sich durch Multiplikation

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x_1} &= px_1 \\ \dot{x_2} &= qx_2 \end{aligned}$$

2. Durch Auflösen der erhaltenen Differentialgleichungen (siehe 2.1) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= px_1 \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = c_1 e^{pt} \\ \dot{x_2} &= qx_2 \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = c_1 e^{qt} \end{aligned}$$

3. In Vektorform umgeschrieben lautet die Lösung des gegebenen Problems:

$$x = c_1 e^{pt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{qt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

Das charakteristische Polynom einer Matrix A ist $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.
Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $P(\lambda)$.
Sei λ ein Eigenwert von A. Jede nicht triviale Lösung v des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda E)v = 0$ heißt Eigenvektor zu Eigenwert λ.
Zur Lösung gehe wie im Folgenden beschrieben vor. Die einzelnen Schritte werden durch ein Beispiel verdeutlicht, das von Übungsblatt 5 Aufgabe 3 stammt.

1. Gegeben sei eine quadratische Matrix A.
   Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

2. Bestimme $A - \lambda E$. Beispiel:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 6 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

3. Bestimme die Determinante $\det A$. Die Nullstellen von $P(\lambda)$ ergeben sich aus $P(\lambda) = 0$. Sie werden *Eigenwerte* genannt.
   Zur Erinnerung: $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.
   Beispiel: Die Determinante einer 3×3 Matrix wird über die Sarrus Regel (Hauptdiagonalen - Nebendiagonalen) errechnet.
   Beispiel $\det(A - \lambda E) = \lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda$. Die Nullstellen sind (erhalten durch gängige Verfahren. Bei komplizierteren Fällen ist eine Polynomdivision angebracht) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$.

4. Konstruiere die Eigenvektoren zu λ_j mit $j \in \mathbb{N}$.
   Löse hierzu $(A - \lambda_j E)v_j = 0$ in Matrixform. $(A - \lambda_j E)$ wurde bereits bestimmt und es wird nunmehr λ_j eingesetzt und das entstehende lineare Gleichungssystem gelöst.
   Am Beispiel von $\lambda_3 = 2$: Setze $\lambda_3 = 4$ in $A - \lambda E$ ein und erhalte
   $$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right)$$
   Durch Auflösen mittels Gauß-Verfahren wird deutlich, dass ein Paramter eingeführt werden muss.
   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
   Wähle aus diesem Grund die letzte Stelle des Eigenvektors als 1 und bestimme auf diesem Wege die fehlenden Komponenten. Erhalte als Lösung für den Eigenwert $\lambda_3 = 4$ den Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Die Lösungen des linearen Gleichungssystems sind die gesuchten Eigenvektoren v_j.

3.1 Zusammenhang Eigenvektoren/-werte und Differentialgleichungssysteme

Beispiel (Übungsblatt 5, Aufgabe 1): Es wandle sich Eduktium in Produktium um. Ihre Massen seien x_1 bzw. x_2. Der Anteil an zerfallendem Edukt und sich bildendem Produkt seien gegeben und ein Gleichungssystem kann aufgestellt werden.

1. Zu lösen ist die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax + b$.
   A ist eine invertierbare 2×2 Matrix, mit zwei verschiedenen, reellen Eigenverten λ_1 und λ_2 und zugehörigen Eigenvektoren v_1 und v_2. b ist ein (konstanter) Vektor.

2. Die allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax + b$ lautet:

   $$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 - A^{-1} b$$

   Setze in die Gleichung die Eigenvektoren ein und das Produkt aus der Inversen der Matrix A und des Vektors B $A^{-1}b$.

3. Ist weiterhin ein Anfangswert $x(0) = x_0$ gegeben. Zu lösen ist

   $$c_1 v_1 + c_2 v_2 = A^{-1} b + x(0)$$

   Die Eigenvektoren und x_0 sind bekannt. Durch lösen des Linearen Gleichungssystems werden c_1 und c_2 erhalten und in die Ausgangsgleichung $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 - A^{-1} b$.

3.2 Rechnen mit Matrizen

3.2.1 Determinanten

1. Die Determinante einer 2×2 Matrix wird über folgende Regel bestimmt:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det A = ad - bc$$

In Worten: *Hauptdiagonale der Matrix - Nebendiagonale*.
Achtung: Diese Regel gilt *nur* für 2×2 Matrizen.

2. Die Determinante einer 3×3 Matrix wird mittels SARRUS Regel bestimmt. Die Matrix A wird daher wie Folgt umgeschrieben.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Es wird numehr die Summe aus „*Hauptdiagonalen - Nebendiagonalen*“ gebildet, wobei die Nebendiagonalen ein negatives Vorzeichen erhalten:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Achtung: Diese Regel gilt *nur* für 3×3 Matrizen.

3.2.2 Inverse

Die Inverse einer 2×2 Matrix wird nach der CRAMERschen Regel gebildet:

$$A^{-1} \quad = \quad \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$